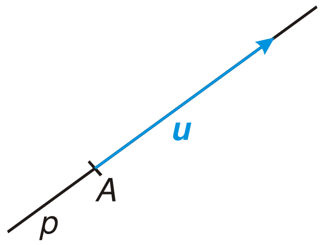
7.3.3 Vzájemná poloha parametricky vyjádřených přímek I

Předpoklady: 070302

Pedagogická poznámka: Tato hodina neobsahuje příliš mnoho příkladů. Postup velké části studentů je poměrně pomalý a často nestihnou spočítat ani obsah této hodiny. Považuji to za přirozené. Dosazování bodů do rovnice, výpočet průsečíků, to jsou všechno postupy, které používají poprvé, a snažím se, aby je opravdu prováděli sami bez opisování z tabule. Další hodiny pak pro ně budou jednodušší.

Parametrické vyjádření přímky: přímka je dána bodem a směrovým vektorem $\Rightarrow$ píšeme $p(A;\boldsymbol{u})$.

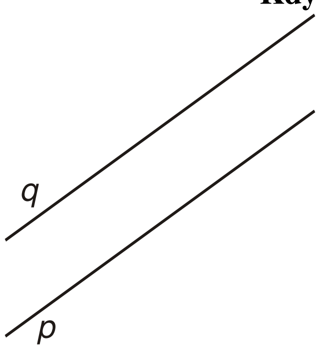


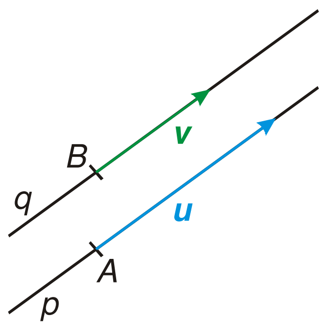
$X = A + t\boldsymbol{u}, t \in R$ (ke každému bodu na přímce se dostaneme z bodu A posunutím o násobek vektoru $\boldsymbol{u}$)

Jaké jsou možnosti pro vzájemnou polohu dvou přímek v rovině?

- rovnoběžné
- totožné
- různoběžné

Kdy jsou přímky rovnoběžné?





Přímky mají stejný směr.

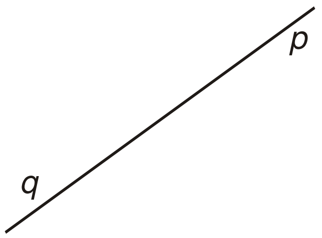
Směrový vektor přímky p je násobkem směrového vektoru přímky q, tedy $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}$ (směrové vektory nemusí být stejné).

Přímky nemají žádný společný bod.

Počáteční bod ani jedné z přímek neleží na druhé přímce.

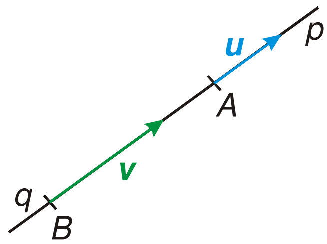
Př. 1: Vytvoř analogické tabulky pro zbývající dvě možné vzájemné polohy přímek v rovině.

Kdy jsou přímky totožné?



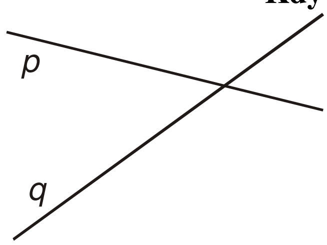
Přímky mají stejný směr.

Přímky mají všechny body společné.



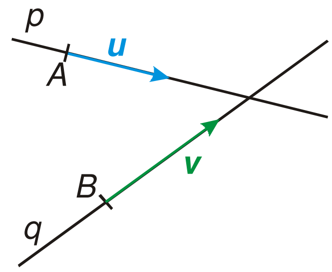
Směrový vektor přímky p je násobkem směrového vektoru přímky q, tedy $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}$ (směrové vektory nemusí být stejné).
Počáteční bod každé z přímek leží na druhé přímce.

Kdy jsou přímky různoběžné?



Přímky nemají stejný směr.

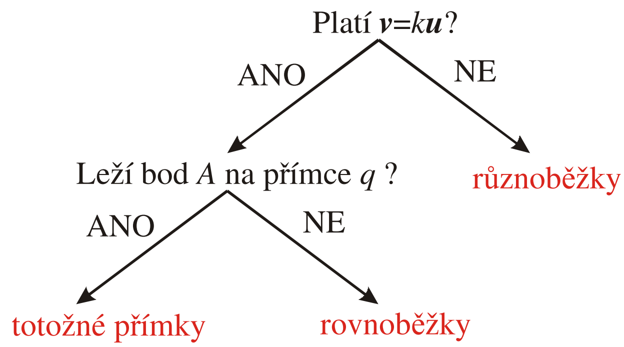
Přímky mají 1 společný bod.



Směrový vektor přímky p není násobkem směrového vektoru přímky q, tedy $\boldsymbol{v} \neq k\boldsymbol{u}$.

Př. 2: Navrhni postup, kterým rozhodneš o vzájemné poloze dvou parametricky zadaných přímek.

Máme dvě přímky $p(A;\boldsymbol{u})$ a $q(B;\boldsymbol{v})$.



Pedagogická poznámka: Diagram postupu sestavujeme po chvilce společně na tabuli. Je to však spíše kvůli zápisu než kvůli tomu, že by studenti měli problémy s pochopením situace.
Ačkoliv postup zjišťování vzájemné polohy není pro studenty příliš obtížný, při řešení následujících příkladů se objeví značné problémy, které však spíše souvisí s tím, že studenti pletou body a vektory dohromady, nemají přehled o tom, co k čemu patří a co čísla znamenají.

Př. 3: Urči vzájemnou polohu přímek $p(A;\boldsymbol{u})$ a $q(B;\boldsymbol{v})$, $A[-1;3]$, $\boldsymbol{u}=(-1;2)$, $B[1;1]$, $\boldsymbol{v}=(2;-4)$. Pokud jsou přímky různoběžné, najdi jejich průsečík.

Zjistíme, zda jsou vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ rovnoběžné.

$$(2;-4)=k(-1;2) \Rightarrow \begin{array}{l} 2=-k \Rightarrow k=-2 \\ -4=2k \Rightarrow k=-2 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Přímky jsou rovnoběžné nebo totožné $\Rightarrow$ zjistíme, zda bod A leží na přímce q.

Parametrické vyjádření přímky q: $\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=1-4t \end{array}$.

Dosadíme bod $A[-1;3]$: $\begin{array}{l} -1=1+2t \\ 3=1-4t \end{array}$.

$-2=2t \Rightarrow t=-1$

$2=-4t \Rightarrow t=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Bod A neleží na přímce q $\Rightarrow$ přímky p a q jsou rovnoběžné.

Pedagogická poznámka: Část studentů samostatně určuje totožnost přímek pomocí vektoru $B-A$. Pokud je vektor rovnoběžný se směrovými vektory obou přímek, jsou přímky totožné. Postup je to samozřejmě správný a je dobré, když jej studenti sami objeví. Dosazování do rovnice přímky je výhodnější jenom kvůli procvičení postupu, který budou častěji potřebovat.

Př. 4: Urči vzájemnou polohu přímek $p(A;\boldsymbol{u})$ a $q(B;\boldsymbol{v})$, $A[-1;1]$, $\boldsymbol{u}=(3;1)$, $B[1;0]$, $\boldsymbol{v}=(-1;-2)$. Pokud jsou přímky různoběžné, najdi jejich průsečík.

Zjistíme, zda jsou vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ rovnoběžné (na první pohled vidíme, že nejsou, ale ověříme to výpočtem): $(-1;-2)=k(3;1) \Rightarrow \begin{array}{l} -1=3k \Rightarrow k=-\frac{1}{3} \\ -2=k \Rightarrow k=-2 \end{array}$.

$\Rightarrow$ Přímky jsou různoběžné $\Rightarrow$ hledáme průsečík (bod, který leží na obou přímkách) $\Rightarrow$ průsečík musí vyhovovat rovnicím obou přímek.

Parametrické vyjádření: přímka p: $\begin{array}{l} x=-1+3t \\ y=1+t \end{array}$, přímka q: $\begin{array}{l} x=1-t \\ y=0-2t \end{array}$,

Průsečík vyhovuje oběma rovnicím.

$\begin{array}{l} -1+3t=1-t \\ 1+t=0-2t \end{array}$ (soustava dvou rovnic o jedné neznámé)

$4t=2 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$

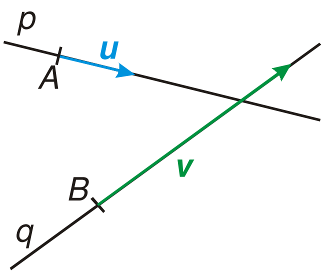
$3t=-1 \Rightarrow t=-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Z obou rovnic vychází jiná hodnota parametru t $\Rightarrow$ soustava nemá řešení.

To ale není možné, přímky se musí protnout, protože nejsou rovnoběžné.

$\Rightarrow$ Někde v postupu je chyba.

Špatně jsme značili parametry, nemůžeme v obou rovnicích použít stejný parametr t.



Parametr je číslo, kterým násobíme směrový vektor, abychom se z počátečního bodu dostali tam, kam chceme. Na obrázku je vidět, že pokud se chceme dostat z počátečních bodů obou přímek do průsečíku:

- vektor ***u*** budeme násobit číslem větším než 1,
- vektor ***v*** budeme násobit číslem menším než 1,

$\Rightarrow$ pro označení parametrů musíme použít dvě různá písmena, protože obecně dosahují různých hodnot.

Předchozí příklad ještě jednou a teď správně.

Parametrické vyjádření: přímka *p*: $\begin{array}{l} x=-1+3t \\ y=1+t \end{array}$, přímka *q*: $\begin{array}{l} x=1-s \\ y=0-2s \end{array}$.

Průsečík vyhovuje oběma rovnicím.

$-1+3t=1-s$ (soustava dvou rovnic o dvou neznámých)

$\underline{1+t=0-2s}$

$3t+s=2$

$\underline{t+2s=-1}$

$\Rightarrow s=2-3t$

$t+2(2-3t)=-1$

$t+4-6t=-1$

$5=5t$

$t=1$

$s=2-3t=2-3\cdot 1=-1$

Dopočítáme průsečík obou přímek z parametrického vyjádření jedné z přímek:

$p,\ t=1:\ \begin{array}{l} x=-1+3t=-1+3\cdot 1=2 \\ y=1+t=1+1=2 \end{array}$ $\Rightarrow$ průsečík má souřadnice $P[2;2]$.

Můžeme si výsledek ověřit dosazením do druhé přímky:

$q,\ s=-1:\ \begin{array}{l} x=1-s=1-(-1)=2 \\ y=0-2s=-2(-1)=2 \end{array}$ $\Rightarrow$ průsečík má souřadnice $P[2;2]$.

Pedagogická poznámka: Chyba, která je v postupu, je velmi častá. Pokud necháte studenty postupovat samostatně, vyhne se jí maximálně pětina z nich. Jen velmi malá část z nich pak chybu odhalí, nemá tedy cenu příliš dlouho čekat, jestli ji objeví nebo ne.

Dalšími místy, kde budou studenti často potřebovat pomoc, je princip počítání průsečíku a hlavně výpočet souřadnic průsečíku z již určených hodnot parametrů. Automati klidně považují hodnoty parametrů za souřadnice průsečíku a napíší $P[1;-1]$.

Př. 5: Urči vzájemnou polohu přímek *p*, *q*, *p*: $\begin{matrix} x=-2+2t \\ y=1-t \quad, t\in R \end{matrix}$, *q*: $\begin{matrix} x=4-4s \\ y=-2+2s, s\in R \end{matrix}$. Pokud jsou přímky různoběžné, najdi jejich průsečík.

Určíme počáteční body a směrové vektory.

p: $\begin{matrix} x=-2+2t \\ y=1-t \quad, t\in R \end{matrix} \Rightarrow A[-2;1]$, $\boldsymbol{u}=(2;-1)$

q: $\begin{matrix} x=4-4s \\ y=-2+2s, s\in R \end{matrix} \Rightarrow B[4;-2]$, $\boldsymbol{v}=(-4;2)$

Zjistíme, zda jsou vektory ***u*** a ***v*** rovnoběžné: $(-4;2)=k(2;-1) \Rightarrow \begin{matrix} -4=2k \Rightarrow k=-2 \\ 2=-1\cdot k \Rightarrow k=-2 \end{matrix}$,

$\Rightarrow$ přímky jsou rovnoběžné nebo totožné $\Rightarrow$ zjistíme, zda bod *A* leží na přímce *q*.

Parametrické vyjádření přímky *q*: $\begin{matrix} x=4-4s \\ y=-2+2s \end{matrix}$.

Dosadíme bod $A[-2;1]$: $\begin{matrix} -2=4-4s \\ 1=-2+2s \end{matrix}$.

$-6=-4s \Rightarrow s=\frac{3}{2}$

$3=2s \Rightarrow s=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ bod *A* leží na přímce *q* $\Rightarrow$ přímky *p* a *q* jsou totožné.

Př. 6: Najdi průsečíky přímek *p*, *q* z předchozího příkladu *p*: $\begin{matrix} x=-2+2t \\ y=1-t \quad, t\in R \end{matrix}$, *q*: $\begin{matrix} x=4-4s \\ y=-2+2s, s\in R \end{matrix}$. Před vlastním výpočtem odhadni, jak bude vypadat řešení soustavy rovnic.

Z řešení předchozího příkladu víme, že přímky *p*, *q* jsou totožné $\Rightarrow$ mají nekonečně mnoho společných bodů $\Rightarrow$ při řešení soustavy rovnic dojdeme k rovnosti $0=0$.
Společné body obou přímek vyhovují oběma rovnicím.

$-2+2t=4-4s$

$1-t=-2+2s \Rightarrow t=3-2s$

$-2+2(3-2s)=4-4s$

$-2+6-4s=4-4s$

$0=0$ $\Rightarrow$ přímky *p* a *q* mají nekonečně mnoho společných bodů.

Př. 7: Petáková:
strana 107/cvičení 30 a) b) d)

Shrnutí: Společné body dvou přímek vyhovují rovnicím obou přímek.